

# Моделирование демпфирующих свойств материалов в ANSYS

## Реферат

Дается полный обзор демпфирования колебаний в вибрационном и акустическом анализе. Использование демпфирующих материалов является важным средством управления колебаниями и акустикой в инженерном деле. Результаты моделирования в вибрационном и акустическом анализе весьма чувствительны к способам описания и задания свойств демпфирования. В настоящей статье обсуждается демпфирование колебаний при использовании программы ANSYS для модального и гармонического анализа. Подытожены некоторые ключевые моменты.

## Введение

Если необходимо контролировать нежелательные колебательные или акустические проблемы, сначала желательно, а зачастую и необходимо понять их природу, включая первоначальный источник, характер и направление колебаний в проблемной области, способ распространения и частотный спектр. Затем необходимо решить, будет ли задача решаться с активными или пассивными способами контроля колебаний. Пассивный контроль включает изменение жесткости, массы и демпфирования колебательной системы, чтобы сделать её менее чувствительной к колебательному возбуждению. В этой статье внимание сосредоточено только на изменении демпфирования как метода пассивного контроля. Если нежелательные колебания или шумы вызваны одним или несколькими резонансами в конструкции, то часто их можно контролировать путем увеличения демпфирования системы. Многие нерезонансные колебательные или акустические проблемы не могут быть решены за счет демпфирования. Чтобы добавленная система демпфирования была эффективной, увеличение демпфирования должно быть значительно больше, чем первоначальное демпфирование. Наиболее распространенный способ увеличения демпфирования состоит в применении в ответственных местах конструкции хорошо демпфирующих полимерных материала-

лов. Конструкция и полимер должны взаимодействовать друг с другом таким образом, чтобы в полимере рассеивалось как можно больше энергии. На практике применяется два способа организации демпфирования для контроля над вибрацией и шумом.

Первый – объемное демпфирование, иногда называемое также демпфированием с помощью неограниченного (свободного) слоя. Полимер наносится на одну или обе стороны конструкции так, что когда конструкция подвергается деформированию, демпфирующий материал подвергается деформациям растяжения – сжатия. Вторым способом называется сдвиговый вид демпфирования. При заданном весе, сдвиговый способ демпфирования более эффективен, чем объемный. Однако, его эффективность девальвируется большей сложностью расчета и реализации. Этот способ подобен методу свободного слоя, только теперь высокоэластичный материал ограничен ещё одним слоем. Поэтому, когда конструкция подвергается деформированию, внешний слой будет ограничивать высокоэластичный материал и принуждать его к сдвиговой деформации. Максимальная сдвиговая деформация среднего слоя зависит от модуля упругости и толщины ограничивающего слоя, толщины слоя демпфирующего материала и его свойств, а также от частоты колебаний.

Точное описание демпфирующих сил, связанных с диссипацией энергии, является чрезвычайно сложной задачей. Они могут зависеть от перемещений, скоростей, напряжений или от других факторов. Большинство механизмов диссипации энергии в колебательных системах являются нелинейными и не могут быть сведены ни к линейному вязкому демпфированию, ни к линейному гистерезисному демпфированию [1]. Тем не менее, идеализированные модели демпфирования полезно изучить, поскольку они часто дают удовлетворительное приближение.

В этой статье дается обзор типов демпфирования, часто используемых в инженерной практике. Затем вводится модель для описания структурного демпфирования. В-третьих, прорабатывается, как ANSYS рассматривает демпфирующие свойства для инженерных приложений. Рассматривается несколько примеров,

чтобы продемонстрировать различие в подходах к описанию эффектов демпфирования. Наконец, даются некоторые ключевые моменты для корректного использования эффектов демпфирования в гармоническом и модальном анализе в ANSYS.

## Виды демпфирующих материалов

Существует несколько видов демпфирования. Вязкое демпфирование – это вид демпфирования, хорошо нам знакомый. Оно возникает в результате потерь энергии при течении жидкости. Примером служит демпфирование в подушках безопасности автомобиля. Фрикционное демпфирование возникает, когда два объекта трутся друг о друга. Оно дает тепло нашим рукам, когда мы потираем ими. Большинству демпфирующих материалов, поставляемых на рынок различными производителями, присуще гистерезисное демпфирование.

### Вязкое демпфирование [2, 3]

Когда механическая система колеблется в текучей среде, такой как воздух, газ, вода или масло, сопротивление, оказываемое движущемуся телу со стороны жидкости, приводит к рассеиванию энергии. Величина рассеиваемой энергии зависит от многих факторов, таких как размеры и форма колеблющегося тела, вязкость жидкости, частота колебаний и скорость колеблющегося тела. При вязком демпфировании сила сопротивления среды пропорциональна скорости колеблющегося тела.

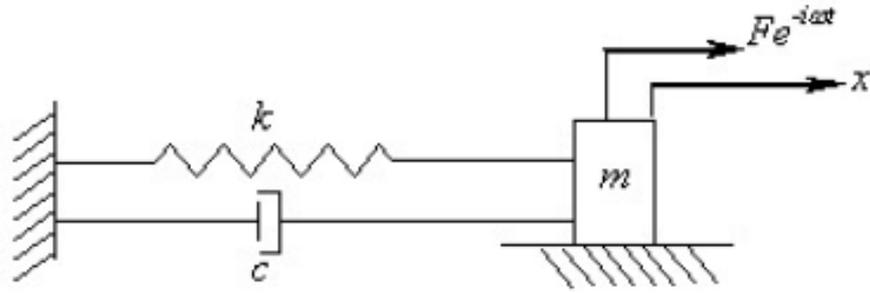
Силу вязкого демпфирования можно выразить равенством:

$$F = -c\dot{x} \quad (1)$$

где  $c$  - константа пропорциональности,  $\dot{x}$  - скорость массы, показанной на рисунке 1.

Для свободных колебаний одиночной системы «пружина – масса» уравнение движения принимает вид:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2)$$



$$[ m = 0,5 \text{ кг}; k = 200 \text{ Н/м}; c = 6 \text{ Н}\cdot\text{с/м}; F = 10 \text{ Н} ]$$

Рисунок 1 – Вынужденные демпфированные колебания системы с одной степенью свободы

Предположив, что решение имеет вид  $x = e^{st}$ , мы приходим к собственному, или характеристическому, уравнению системы:

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (3)$$

Решение уравнения (2) есть:

$$x = e^{-\frac{c}{2m}t} \cdot \left( Ae^{t \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}} + Be^{-t \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}} \right) \quad (4)$$

где  $A$  и  $B$  - произвольные постоянные, зависящие от того, как началось движение.

Видно, что поведение демпфированной системы зависит от величины квадратного корня в экспонентах формулы (4). В качестве сравнительной величины определим *критическое демпфирование*  $c_c$  как такое значение  $c$ , которое обращает квадратный корень в нуль:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \quad \text{или} \quad c_c = 2\sqrt{km} = 2m\omega_n \quad (5),(6)$$

где  $\omega_n$  - собственная круговая частота системы,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ .

Важным параметром, характеризующим демпфирование, является *степень демпфирования (damping ratio)*  $\zeta$ ; это есть безразмерное отношение:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (7)$$

В зависимости от значения степени демпфирования характер движения массы на рисунке 1 можно подразделить на три случая: (1) колебательное движение - когда  $\zeta < 1,0$  ; (2) неколебательное движение – когда  $\zeta > 1,0$  и (3) движение при критическом демпфировании – когда  $\zeta = 1,0$  . В последнем случае общее решение уравнения движения системы имеет вид:  $x = (A + Bt) \cdot e^{-\omega_n t}$  .

Вязкое демпфирование можно использовать при любой форме возбуждения. Наиболее общая форма вязкого демпфирования есть рэлеевское демпфирование, представляемое в виде:

$$c = \alpha m + \beta k \quad (8)$$

### Кулоновское, или фрикционное демпфирование

Кулоновское демпфирование имеет место при скольжении двух сухих поверхностей. Демпфирующая сила равна произведению нормального усилия на коэффициент трения  $\mu$  и считается не зависящей от скорости, лишь только движение начнется. Поскольку демпфирующая сила по знаку всегда противоположна скорости, дифференциальное уравнение движения для каждого её знака справедливо только на полупериоде:

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N \quad (9)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение можно представить в виде:

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{\mu N}{k} \quad (10)$$

### Гистерезисное, или конструкционное демпфирование

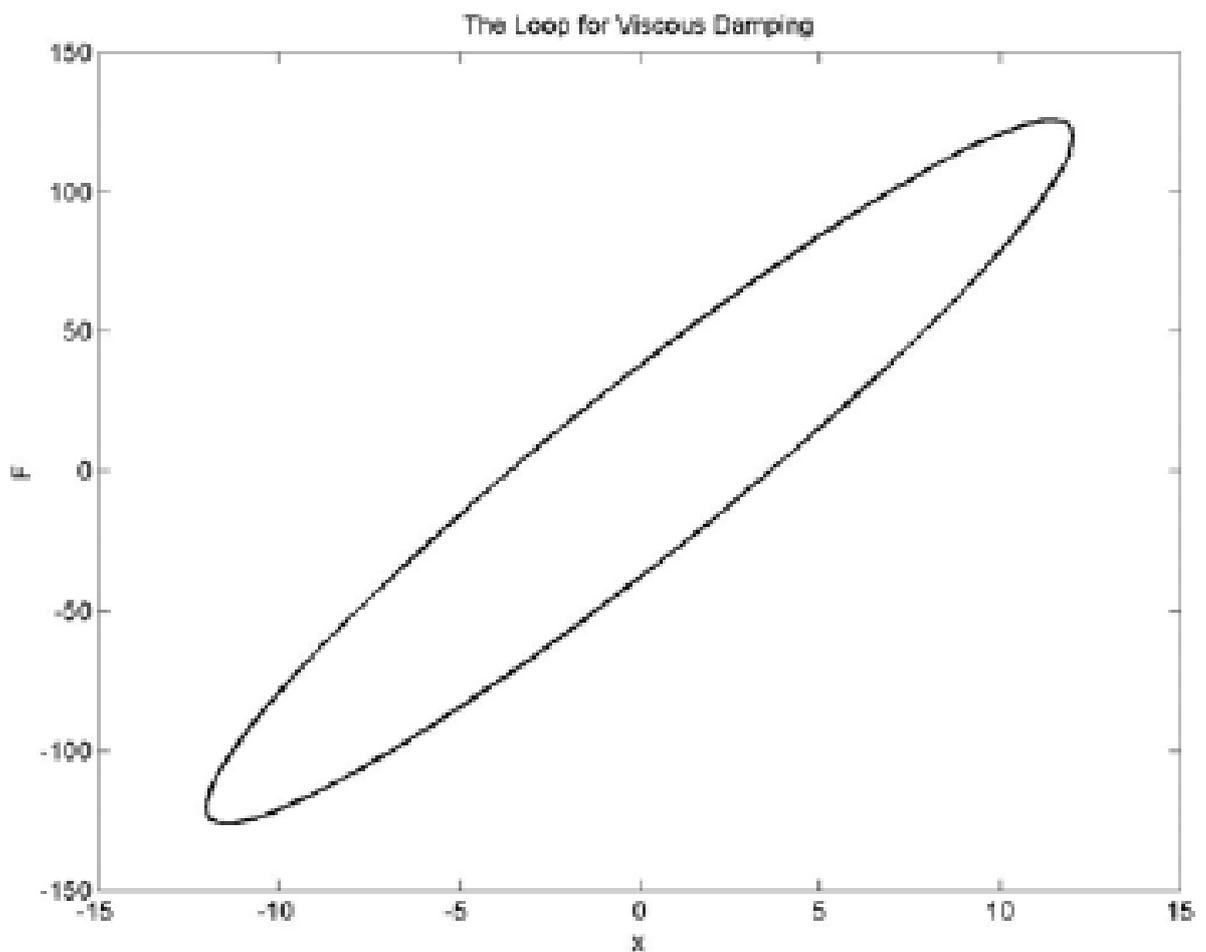
В основном, демпфирующие материалы представляют собой полимеры (синтетические резины), состав которых надлежащим образом подобран, чтобы обеспечить высокие демпфирующие свойства в определенном диапазоне частот и температур. Когда материал деформируется, энергия поглощается и рассеива-

ется внутри самого материала. Этот эффект обусловлен трением между внутренними слоями, которые «текут» или скользят, когда имеет место деформирование. Когда конструкция с материальным демпфированием подвергается колебаниям, на диаграмме «напряжения – деформации» обнаруживается петля гистерезиса. Поэтому материальное демпфирование называют также *гистерезисным демпфированием*. Площадь петли выражает потерю энергии в единице объема тела за один цикл вследствие демпфирования.

Чтобы пояснить гистерезисное демпфирование, мы сначала рассмотрим соотношение между откликом  $x$  и возбуждающей силой  $F$ <sup>1)</sup> для вязкого демпфирования. При гармоническом движении  $x = X e^{-i\omega t}$  соотношение между ними имеет вид:

$$F(t) = (k - i\omega c)x \quad (11)$$

Это проиллюстрировано на рисунке 2.



<sup>1)</sup> точнее,  $F$  - это сумма силы упругой и демпфирующей – прим. перев.

## Рисунок 2 – Петля гистерезиса для вязкого демпфирования

Равенство (12) дает энергию, рассеиваемую за один цикл колебаний; это есть площадь петли гистерезиса, изображенной выше.

$$\Delta W = \oint \operatorname{Im}(F) \cdot d \operatorname{Im}(x) = \int_0^{2\pi/\omega} (\omega c X \cos \omega t + kX \sin \omega t)(\omega X \cos \omega t) dt = \pi \omega c X^2 \quad (12)$$

где «Im» - символ мнимой части комплексной величины.

Аналогично, при гистерезисном демпфировании имеется петля гистерезиса, образованная кривой «деформация – напряжение» или «перемещение – усилие» на одном цикле нагружения и разгрузки. Экспериментально найдено, что для большинства конструкционных металлов потеря энергии от внутреннего трения за один цикл не зависит от частоты, но примерно пропорциональна квадрату амплитуды. Чтобы получить наблюдаемое поведение по вышеприведенной формуле, эквивалентный коэффициент демпфирования  $c_{eq}$  полагают обратно пропорциональным частоте:

$$c_{eq} = \frac{h}{\omega} \quad (13)$$

где  $h$  есть коэффициент гистерезисного демпфирования

Подставляя (13) в формулу (12), получим для энергии, рассеиваемой при гистерезисном демпфировании за один цикл колебаний:

$$\Delta W = \pi h X^2 \quad (14)$$

### Моделирование демпфирующих свойств [5]

#### Фактор конструкционного демпфирования $\gamma$

Наряду с коэффициентом вязкого демпфирования  $c$ , коэффициентом гистерезисного демпфирования  $h$  и степенью демпфирования  $\zeta$  для описания свойств демпфирующих материалов применяется ещё один весьма важный параметр – коэффициент конструкционного демпфирования.

Уравнение вынужденного движения для системы «пружина – масса» с гистерезисным демпфированием имеет вид:

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + kx = f(t) \quad (15)$$

Для гармонической задачи  $x = Xe^{-i\omega t}$  оно принимает вид:

$$-\omega^2 mx + k \left( 1 - i \cdot 2 \frac{\omega}{\omega_n} \zeta_{eq} \right) x = f(t) \quad (16)$$

где  $\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{h}{2m\omega_n\omega}$ .

При модальном демпфировании  $\omega = \omega_n$ , и мы имеем:

$$m\ddot{x} + k(1 - i\gamma)x = f(t) \quad (17)$$

где  $\gamma = 2\zeta_{eq} = \frac{h}{m\omega_n^2} = h/k$  есть так называемый *фактор конструкционного*

*демпфирования* (structural damping factor), или модальная степень демпфирования<sup>2)</sup> (modal damping ratio).

Для вязкого демпфирования, аналогично, фактор вязкого демпфирования будет равен  $\gamma = 2\zeta$ .

### Комплексная жесткость

Влияние полимерного материала на демпфирование всей конструкции зависит как от жесткости этого материала, так и от его демпфированности. Эти два свойства удобно выражать через комплексный модуль Юнга  $E(1 - i\eta_E)$  или комплексный модуль сдвига  $G(1 - i\eta_G)$ ;  $\eta_E$  и  $\eta_G$  обычно предполагаются равными для данного материала.

Когда материал подвергается циклическим напряжениям и деформациям с амплитудами  $\sigma_0$  и  $\varepsilon_0$ , максимальная запасенная энергия и рассеиваемая за один цикл энергия равны:

$$\text{Максимальная энергия, запасенная за цикл} = \frac{E\varepsilon_0^2}{2} \quad (18)$$

$$\text{Энергия, рассеиваемая за цикл} = \pi E\eta\varepsilon_0^2 \quad (19)$$

---

<sup>2)</sup> (прим. перев.) Видимо, точнее, модальная степень демпфирования все же равна  $\gamma/2$

Сравнив с равенством (17), видим, что комплексная жесткость  $k\left(1 - i\frac{h}{k}\right)$  подобна комплексному модулю  $E(1 - i\eta)$  или  $G(1 - i\eta)$ . Определив *фактор потерь* (loss factor) как  $\eta = h/k$ , комплексную жесткость можно представить в виде  $k(1 - i\eta)$ . Величина  $\eta$  может варьироваться от  $2 \cdot 10^{-5}$  для чистого алюминия до 1,0 для твердой резины. Таким образом, фактор конструкционного демпфирования  $\gamma$  эквивалентен фактору потерь  $\eta$ . Фактор потерь – это величина, характеризующая демпфирующую способность материала.

Физический смысл фактора потерь можно пояснить следующим образом. Энергия, рассеиваемая за цикл в системе с конструкционным демпфированием:

$$\Delta W = \pi h X^2 = \pi \eta k X^2 = 2\pi \eta \cdot \frac{1}{2} k X^2 = 2\pi \eta \cdot U_m \quad (20)$$

где  $U_m$  - максимальная запасенная энергия упругой деформации.

Таким образом, мы имеем:

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{U_m} \quad (21)$$

Из формулы (21) видно, что фактор потерь дает способ сравнивать демпфирование одного материала с другим. Это отношение величины энергии, рассеиваемой в системе при определенной частоте, к величине энергии, имеющейся в системе при этой же частоте. Чем большее демпфирование имеет материал, тем больше будет фактор потерь. Этот способ представления конструкционного демпфирования можно использовать только для анализа в области частот, когда возбуждение имеет гармонический характер [4].

### Линейная математическая модель

Многие нелинейные расчеты откликов систем с демпфированием выполняются с использованием следующего аналитического представления петли гистерезиса:

$$\vec{\sigma} = E \left\{ \varepsilon - \frac{\nu}{n} \left( (\varepsilon_0 + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n \right) \right\} \quad (22)$$

$$\bar{\sigma} = E \left\{ \varepsilon + \frac{\nu}{n} \left( (\varepsilon_0 - \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n \right) \right\} \quad (23)$$

где  $\bar{\sigma}$  - напряжение на нагружающем участке цикла;

$\bar{\sigma}$  - напряжение на разгружающем участке цикла;

$\nu$  - коэффициент Пуассона;

$\varepsilon_0$  - начальная деформация;

$n$  - безразмерный параметр, описывающий форму петли гистерезиса

Альтернативная форма представления, несколько попроще, имеет следующий вид:

$$\bar{\sigma} = E(\varepsilon) \left\{ \varepsilon \pm \eta(\varepsilon) \varepsilon_0 \left| 1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2} \right|^n \right\}, \text{ где } E(\varepsilon) = \frac{E}{1 + \alpha |\varepsilon|^\beta} \quad (24)$$

Одно из наиболее широко используемых представлений уравнения состояния известно как «стандартная линейная модель», дающая следующее соотношение между напряжением и деформацией:

$$\sigma + a \frac{d\sigma}{dt} = E\varepsilon + bE \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (25)$$

Данное уравнение дает более сложное соотношение между напряжением и деформацией, чем закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$ , либо простая комбинация «пружина – демпфер», для которой  $\sigma = E\varepsilon + bE \frac{d\varepsilon}{dt}$ . Две константы  $a$  и  $b$  в уравнении (25) являются параметрами релаксации напряжения и деформации соответственно. Если приложенное напряжение и деформация изменяются гармонически, то есть как  $\sigma = \sigma_0 e^{-i\omega t}$  и  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-i\omega t}$ , то уравнение дает:

$$\sigma_0 = E\varepsilon_0 \left( \frac{1 - i\omega b}{1 - i\omega a} \right); \quad \sigma_0 = E\varepsilon_0 \left( \frac{1 + \omega^2 ab}{1 + \omega^2 a^2} - i\omega \frac{b - a}{1 + \omega^2 a^2} \right) \quad (26),(27)$$

Из формул (26),(27) можно видеть, что фактор потерь, как правило, зависит от частоты. Модуль упругости также зависит от частоты, если константа  $a$  не равна нулю.

## Демпфирование колебаний в программе ANSYS [6]

В ANSYS матрица демпфирования  $[C]$  может использоваться в гармоническом, модальном и динамическом анализе с демпфированием, а также при создании суперэлементов (substructure). В наиболее общей форме она имеет вид:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] + \sum_{j=1}^{N_{mat}} \beta_j [K_j] + \beta_c [K] + [C_\zeta] + \sum_{k=1}^{N_{ele}} [C_k] \quad (28)$$

где  $\alpha$  - *постоянный* множитель к матрице масс

(задается командой ALPHAD);

$\beta$  - *постоянный* множитель к матрице жесткости

(задается командой BETAD);

$\beta_j$  - *постоянный* множитель к матрице жесткости, зависящий от материала (задается командой MP,DAMP). Отметим, что когда используется демпфирование в зависимости от материала, то для различных видов анализа команда MP,DAMP задает *разные* параметры демпфирования. Например, в спектральном анализе MP,DAMP задает зависящую от материала степень демпфирования (damping ratio)  $\zeta_j$ , а не множитель  $\beta_j$  ( $N_{mat}$  - число материалов с демпфированием).

$\beta_c$  - *переменный* множитель к матрице жесткости (применим в гармоническом анализе, используется для обеспечения постоянства степени демпфирования  $\zeta$ , вне зависимости от частоты  $\omega$ ):

$$\beta_c = \frac{\zeta}{\pi f} = \frac{2\zeta}{\omega} = \frac{\eta}{\omega} \quad (29)$$

где  $\zeta$  - *постоянная* степень демпфирования (constant damping ratio) (задается командой DMPRAT). Согласно (29),  $\zeta$  должна быть равна  $\eta/2$  ;

$\eta$  - фактор потерь;

---

<sup>3)</sup> (прим. перев.) Для гармонических колебаний с одной степенью свободы матрицы жесткости и демпфирования превращаются в коэффициенты  $k$  и  $c$  соответственно, так что, согласно (16),  $k(2\zeta/\omega_n)(-i\omega x) = c\dot{x}$  и, следовательно,  $c = \beta_c k$ , где  $\beta_c = 2\zeta/\omega_n = \eta/\omega_n$

$f$  - частота, в гармоническом анализе изменяется в интервале от начальной частоты ( $f_b$ ) до конечной ( $f_e$ ).

$[C_\zeta]$  - матрица демпфирования, зависящая от частоты;  $[C_\zeta]$  может быть выражена через  $\zeta_r$  - степень демпфирования для  $r$ -ой собственной моды, но никогда не вычисляется явно:

$$\{u_r\}^T [C_\zeta] \{u_r\} = 4\pi f_r \zeta_r \quad (30)$$

где  $f_r$  - частота, связанная с  $r$ -ой собственной модой;

$\{u_r\}$  - вектор перемещений, описывающий форму для  $r$ -ой собственной моды;

$$\zeta_r = \zeta + \zeta_{mr} \quad (31)$$

где  $\zeta$  - постоянная степень демпфирования (заданная командой DMPRAT);

$\zeta_{mr}$  - модальная степень демпфирования (modal damping ratio) для  $r$ -ой собственной моды (задается командой MDAMP);

$[C_k]$  - матрица демпфирования отдельного  $k$ -го элемента ( $N_{ele}$  - число элементов, имеющих собственную матрицу демпфирования).

### Рэлеевское демпфирование $\alpha$ и $\beta$

Наиболее общая форма задания демпфирования – это так называемое рэлеевское демпфирование вида  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ . Достоинством такого представления является то, что в модальных координатах матрица принимает вид:

$$[\bar{C}] = \alpha[I] + \beta[\Lambda] \quad (32)$$

где  $[I]$  - единичная матрица;  $[\Lambda] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$

$\omega_r$  - собственная частота  $r$ -ой моды собственных колебаний,

то есть матрица  $[\bar{C}]$  диагональна. Таким образом, для любой  $r$ -ой моды уравнение движения (уравнение (15)) может быть отделено и записано в форме:

$$\ddot{q}_r + (\alpha + \beta\omega_r^2)\dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = Q_r \quad (33)$$

Полагая

$$2\zeta_{mr}\omega_r = \alpha + \beta\omega_r^2, \quad (34)$$

перепишем уравнение (33) в виде:

$$\ddot{q}_r + 2\zeta_{mr}\omega_r\dot{q}_r + \omega_r^2q_r = Q_r \quad (35)$$

где  $\zeta_{mr}$  есть  $r$ -я модальная степень демпфирования (modal damping ratio)

Значения  $\alpha$  и  $\beta$  в общем случае непосредственно не известны, но могут быть вычислены через модальные степени демпфирования  $\zeta_{mr}$ . Согласно (34),  $\zeta_{mr}$  - это отношение действительного демпфирования  $\alpha + \beta\omega_r^2$  к критическому демпфированию  $2\omega_r$  для данной  $r$ -ой моды колебаний. Из формулы (34) мы имеем:

$$\zeta_{mr} = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta}{2}\omega_r \quad (36)$$

В большинстве практических задач  $\alpha$  - демпфирование (массовое демпфирование), представляющее фрикционное демпфирование, можно не учитывать ( $\alpha = 0$ ). В этом случае  $\beta$  можно найти по известным значениям  $\zeta_{mr}$  и  $\omega_r$ , описывающим материальное конструкционное демпфирование. Заметим, что на шаге нагружения (load step) можно задать только одно значение  $\beta$ , так что для определения  $\beta$  мы должны выбрать наиболее существенную активную частоту на данном шаге нагружения.

В случае, когда демпфирующие свойства существенно различаются для разных частей конструкции, вышеописанный подход не может быть применен непосредственно. Примером служит задача, включающая взаимодействие конструкции с грунтом, где демпфирование в грунте значительно больше, чем в конструкции.

### Демпфирование, зависящее от материала $\beta_j$

Здесь бета-демппирование  $\beta_j$  задается как свойство материала (вводится командой MP,DAMP). Напоминаем, что команда MP,DAMP в спектральном ана-

лизе (ANTYPE,SPECTR) задает для материала степень демпфирования  $\zeta_j$ , а не коэффициент  $\beta_j$ .

### Постоянная степень демпфирования (constant damping ratio) $\zeta$

Команда DMPRAT используется для представления фактора потерь, где  $\zeta$  задается равным  $\eta/2$ . Величина  $\zeta$  задается командой DMPRAT в виде десятичного числа, что является простейшим способом введения демпфирования в конструкцию. Величина  $\zeta$  представляет отношение действительного демпфирования к критическому. Команда DMPRAT применима только в спектральном анализе, гармоническом анализе и в динамическом переходном анализе методом суперпозиции мод. Как показывает формула (29), постоянная степень демпфирования  $\zeta$  используется программой для определения множителя  $\beta_c$ .

### Модальное демпфирование $\zeta_{mr}$

Оно вводится командой MDAMP и дает нам возможность задавать различные значения степени демпфирования  $\zeta_{mr}$  для разных мод колебаний. Команда MDAMP применима только в спектральном анализе и в анализах методом суперпозиции мод (переходный динамический и гармонический анализ). С помощью уравнений (30) и (31)  $\zeta_{mr}$  используется программой для вычисления матрицы демпфирования  $[C_\zeta]$ , зависящей от частоты.

### Поэлементное демпфирование $[C_k]$

Поэлементное демпфирование предполагает использование некоторых специальных типов элементов, имеющих характеристики вязкого демпфирования, таких как COMBIN7, COMBIN14, COMBIN37, COMBIN40 и т.д. Поэлементное демпфирование вводится через действительную константу (real constant) элемента.

## Демпфирование колебаний в гармоническом анализе

Для проверки того, как интерпретируются демпфирующие свойства при гармоническом анализе (harmonic response analysis) в ANSYS, рассмотрим несколько дискретных колебательных систем.

### Вязкое демпфирование

#### Одинарная система «пружина – масса» (см. рисунок 1)

1) Способ с заданием действительной константы для элемента - непосредственный ввод коэффициента вязкого демпфирования  $C$  в виде действительной константы (real constant) для элемента COMBIN14 (см. рисунок 3).

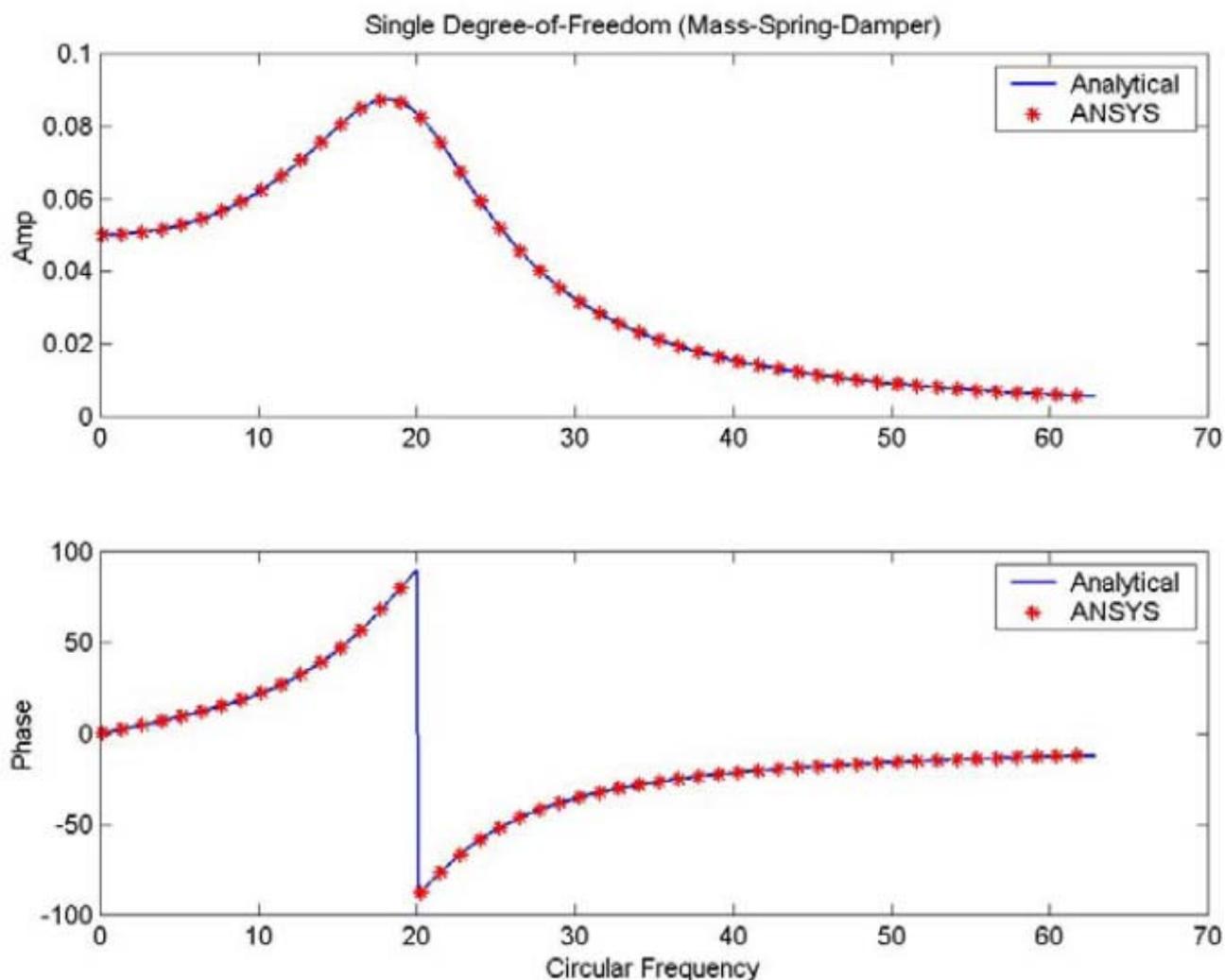


Рисунок 3 – Отклик вязкодемпфированной системы с одной степенью свободы

2) Метод рэлеевского бета-демпфирования (вводится командой BETAD):  
 $\beta = 2\zeta / \omega_n$  (см. рисунок 4). Сначала по собственной частоте  $\omega_n$  системы рассчитывается степень демпфирования  $\zeta$ , затем по формуле  $\beta = 2\zeta / \omega_n$  вычисляется параметр  $\beta$ :

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{200/0,5} = 20 \text{ (рад/с); } \zeta = c/(2m\omega_n) = 6/(2 \cdot 0,5 \cdot 20) = 0,3 ;$$

$$\beta = 2\zeta / \omega_n = 2 \cdot 0,3 / 20 = 0,03 \text{ (с).}$$

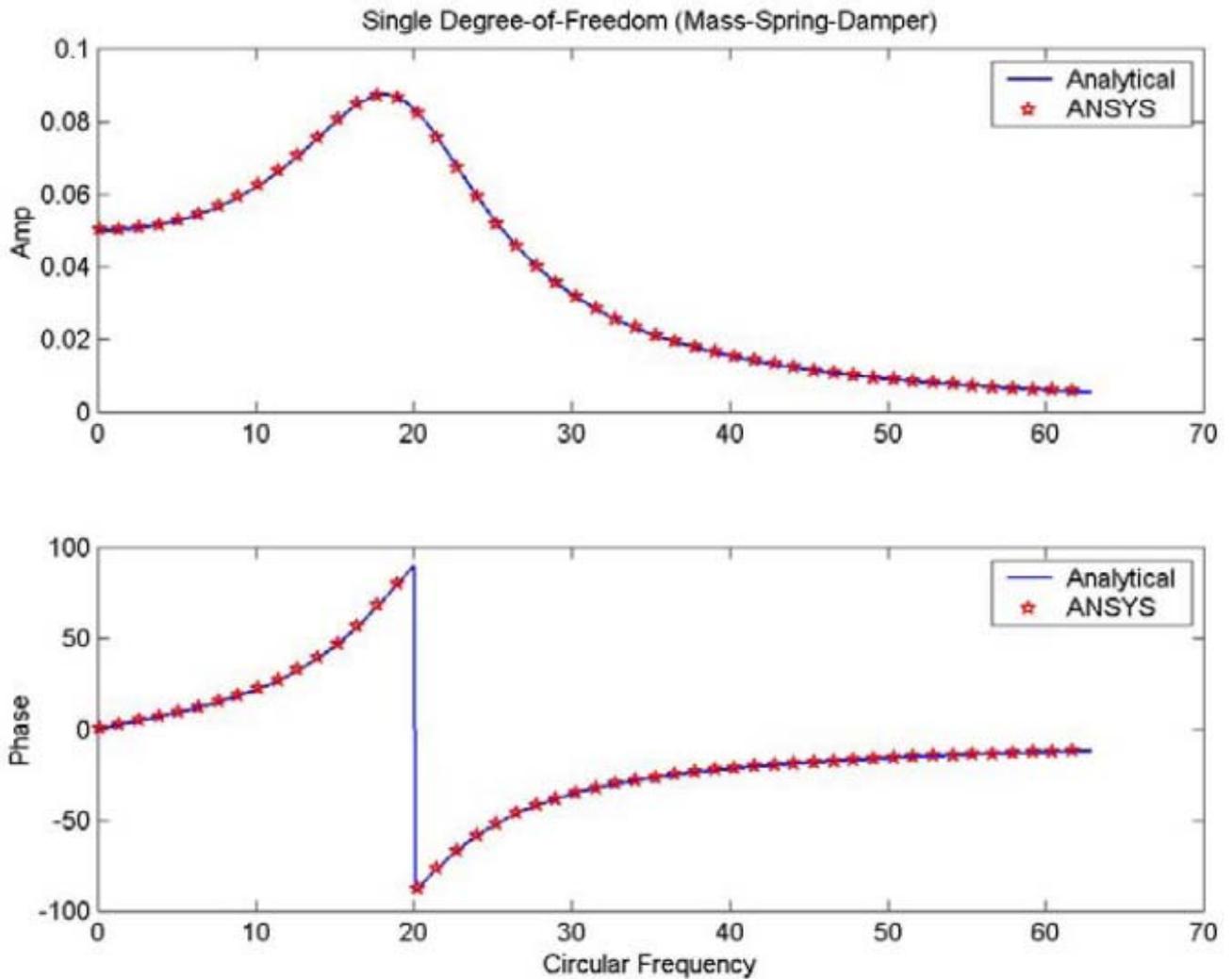


Рисунок 4 – Отклик вязкодемпфированной системы с одной степенью свободы ( $\beta = 0,03 \text{ с}$ )

3) Метод с заданием свойства материала  $\beta_j = 2\zeta_j / \omega_n$  (задается командой MP,DAMP). Аналогично введению параметра  $\beta$ , рассмотренному выше, демпфирующие свойства можно ввести в систему, связывая с элементом (например,

COMBIN14) величину демпфирования  $\beta_j$ , заданную в виде свойства материала (MP,DAMP) – см. рисунок 5.

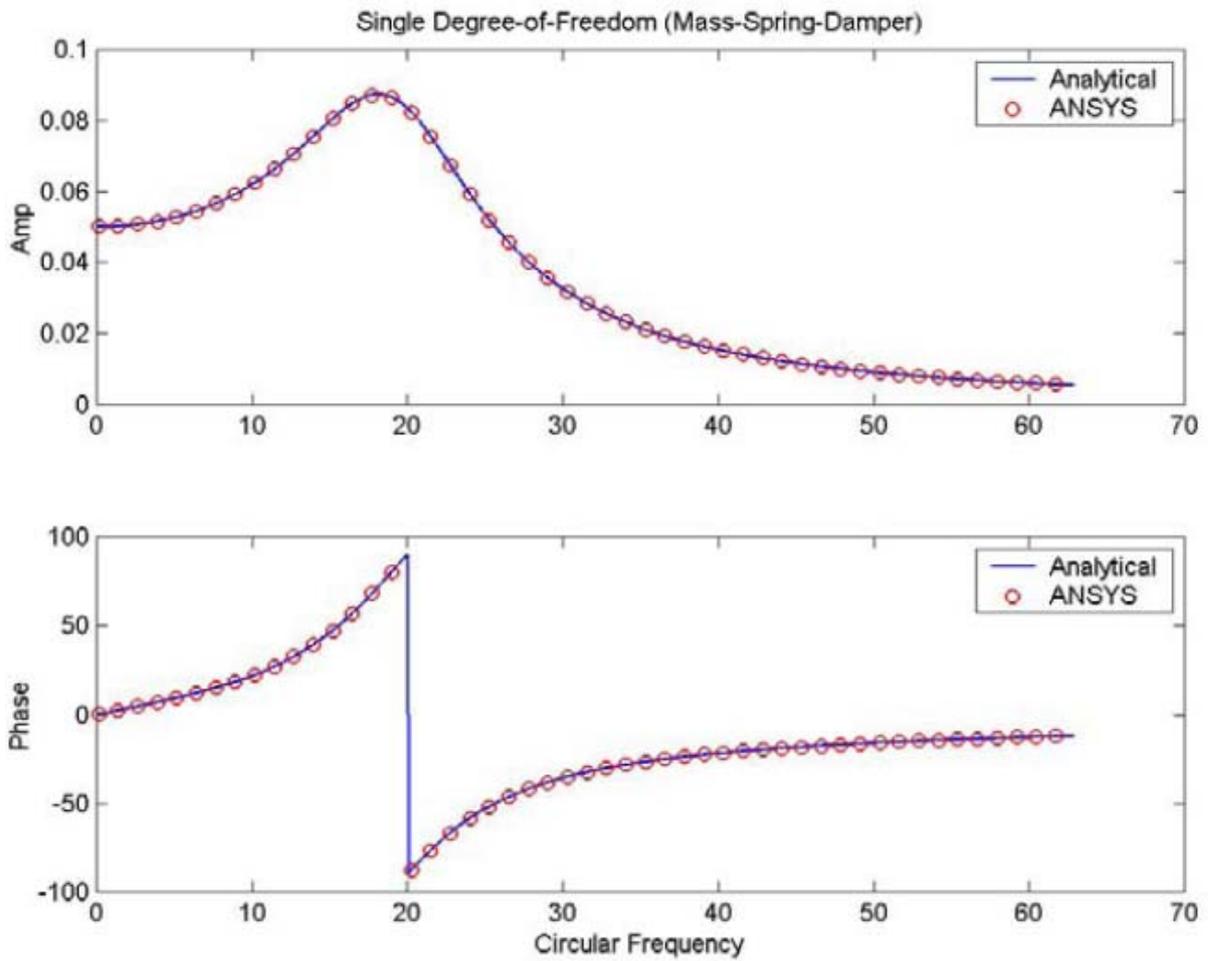
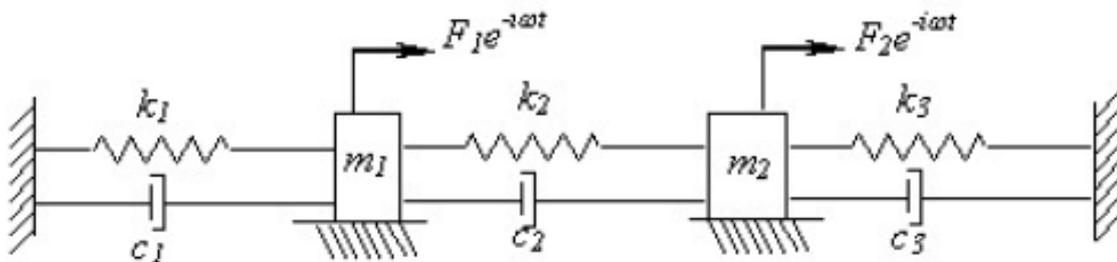


Рисунок 5 – Отклик вязкодемпфированной системы с одной степенью свободы ( $\beta_j = 0,03$  с)

Сложная система пружин и масс (см. рисунок 6)



$$[ m_1 = m_2 = 0,5 \text{ кг}; \quad k_1 = k_2 = k_3 = 150 \text{ Н/м}; \quad c_1 = 5 \text{ Н}\cdot\text{с/м}; \\ c_2 = 0,1 \text{ Н}\cdot\text{с/м}; \quad c_3 = 0,05 \text{ Н}\cdot\text{с/м}; \quad F_1 = 10 \text{ Н}; \quad F_2 = 500 \text{ Н} ]$$

Рисунок 6 – Вынужденные демпфированные колебания системы с двумя степенями свободы (2 DOF)

1) Способ с заданием действительных констант для элементов - непосредственный ввод коэффициента вязкого демпфирования  $C_i$  каждого демпфера через соответствующие действительные константы (real constant) используемых элементов (см. рисунок 7).

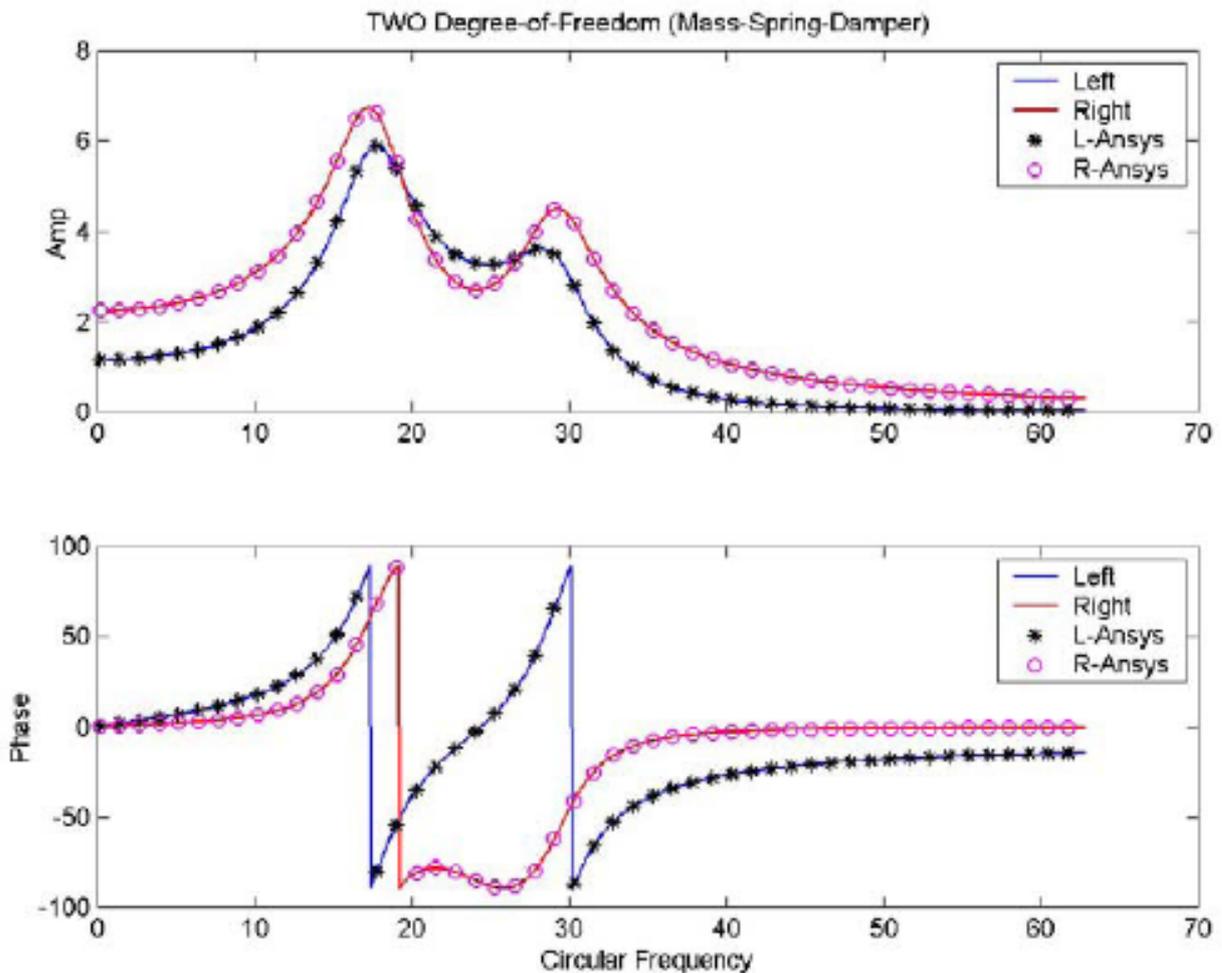


Рисунок 7 – Отклик вязкодемпфированной 2DOF – системы

2) Через свойство материала  $\beta_j = 2\zeta_j / \omega_n$  (ввод командой MP,DAMP)

Это требует вычисления собственных частот системы и определения наиболее существенной моды для рассматриваемой задачи, поскольку у систем со многими степенями свободы имеется более чем одна собственная частота. Пусть доминирующая (главная) собственная частота есть  $\omega_d$ , тогда демпфирование материала  $\beta_j$  можно вычислить через эту собственную частоту. Можно ожидать, что с увеличением числа степеней свободы колебательной системы будет непросто выделить доминирующую собственную частоту. На рисунке 8 показан от-

клик двух масс, когда в качестве доминирующей принята первая собственная частота ( $\omega_1 = 17,32$  рад/с).

На рисунке 9 показан отклик двух масс, когда в качестве доминирующей принята вторая собственная частота ( $\omega_2 = 30,00$  рад/с). Как показывает рисунок 9, наблюдается явное расхождение с аналитическим решением, если в качестве доминирующей принята «неподходящая» собственная частота.

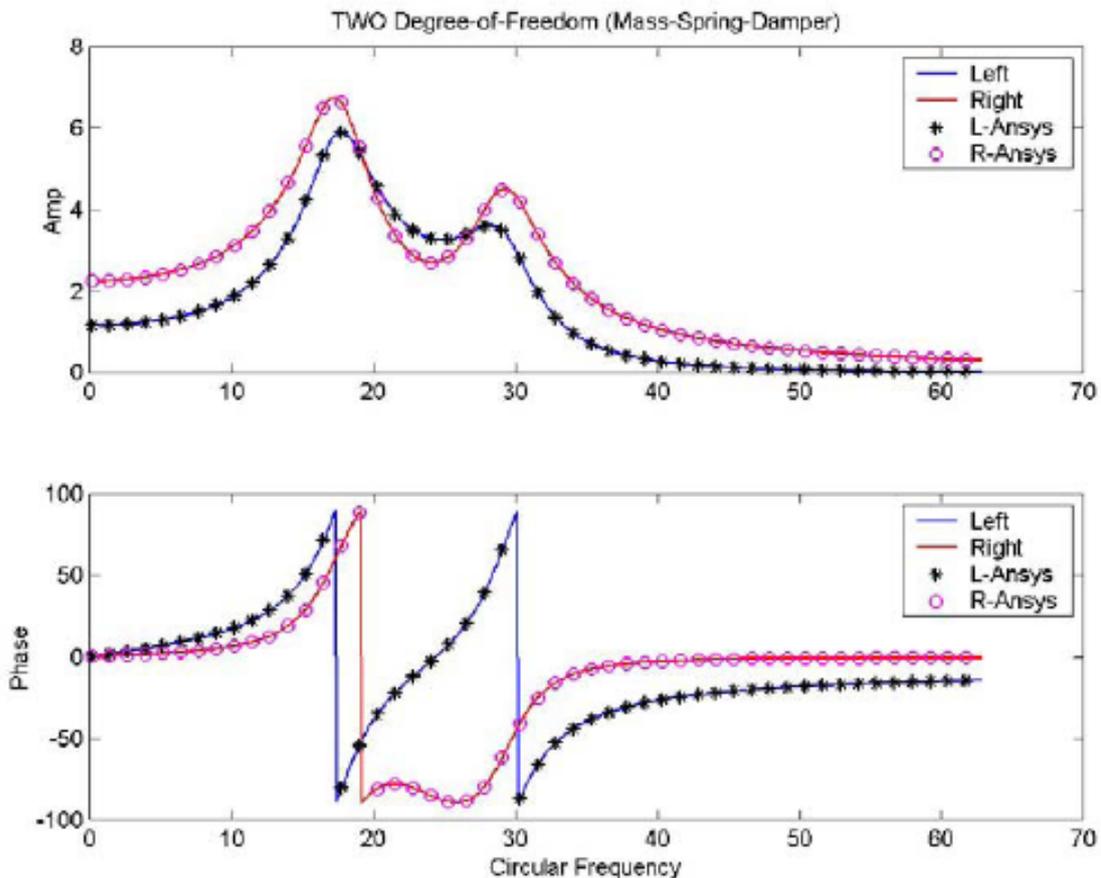


Рисунок 8 – Отклик вязкодемпфированной 2DOF – системы

$$(\beta_1 = 0,033 \text{ с}; \beta_2 = 6,666 \cdot 10^{-4} \text{ с}; \beta_3 = 3,333 \cdot 10^{-4} \text{ с})$$

3) Еще раз отметим, что поскольку на шаге нагружения (load step) можно задать только одно значение  $\beta$ , метод рэлеевского  $\beta$ -демпфирования не может быть непосредственно использован для задания демпфирующих свойств колебательной системы с несколькими различными демпфирующими материалами. На рисунке 10 показан отклик двух масс при  $\beta = 0,03333$  с.

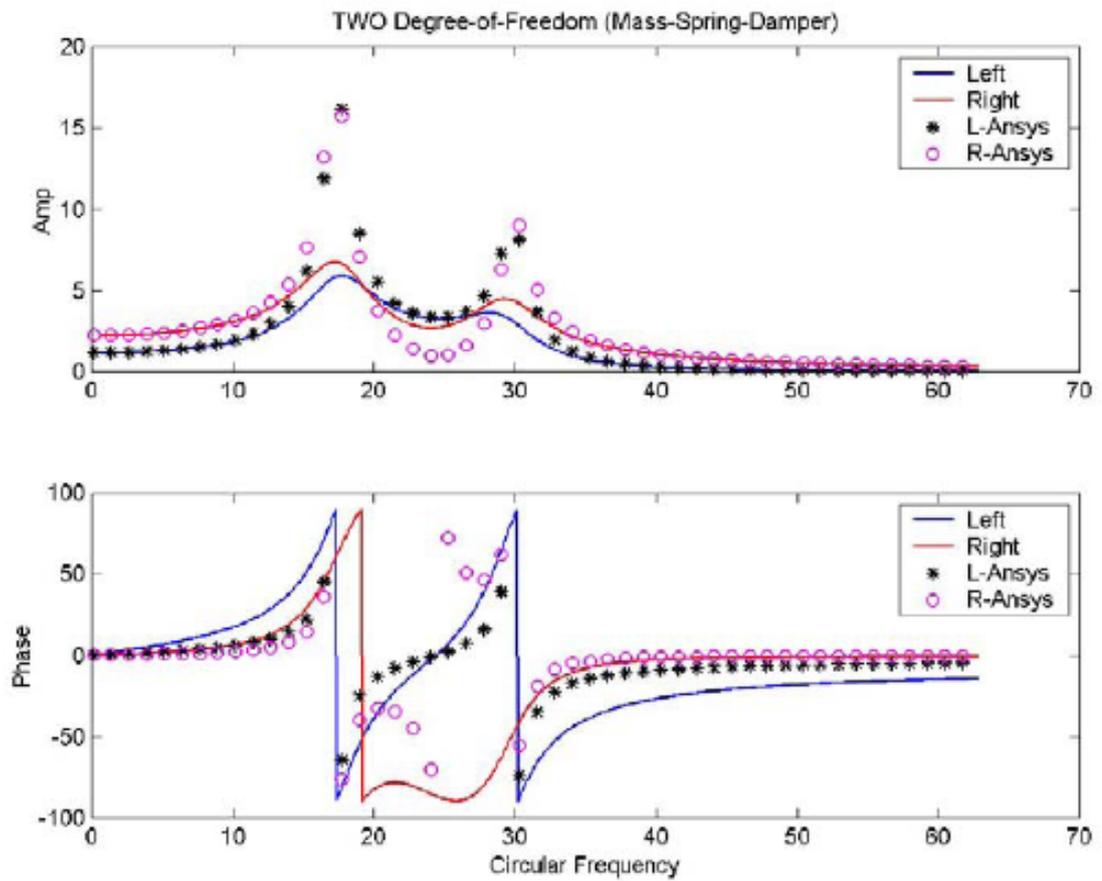


Рисунок 9 – Отклик вязкодемпфированной 2DOF – системы  
 $(\beta_1 = 0,011 \text{ с}; \beta_2 = 2,222 \cdot 10^{-4} \text{ с}; \beta_3 = 1,111 \cdot 10^{-4} \text{ с})$

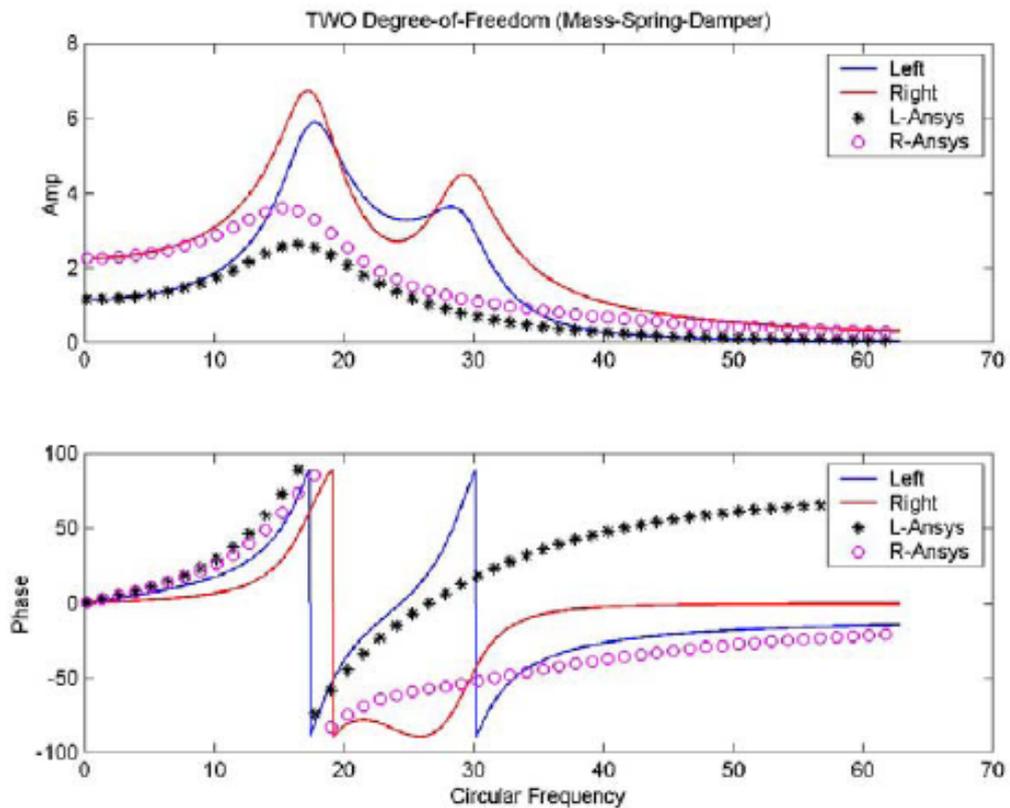


Рисунок 10 – Отклик вязкодемпфированной 2DOF – системы  
 (через метод рэлеевского демпфирования при  $\beta = 0,03333 \text{ с}$ )

## Гистерезисное демпфирование

1) Переменный множитель  $\beta_c$  определяется через постоянную степень демпфирования  $\zeta$  (constant damping ratio), задаваемую командой DMPRAT. Как указывалось выше, команда DMPRAT может быть использована для задания гистерезисного демпфирования для одной степени свободы колебательной системы. Как и прежде, по формуле (29) степень демпфирования  $\zeta$  должна быть равна  $\eta/2$ , где  $\eta$  - фактор потерь. На рисунке 11 показан отклик колебательной системы с одной степенью свободы при гистерезисном демпфере.

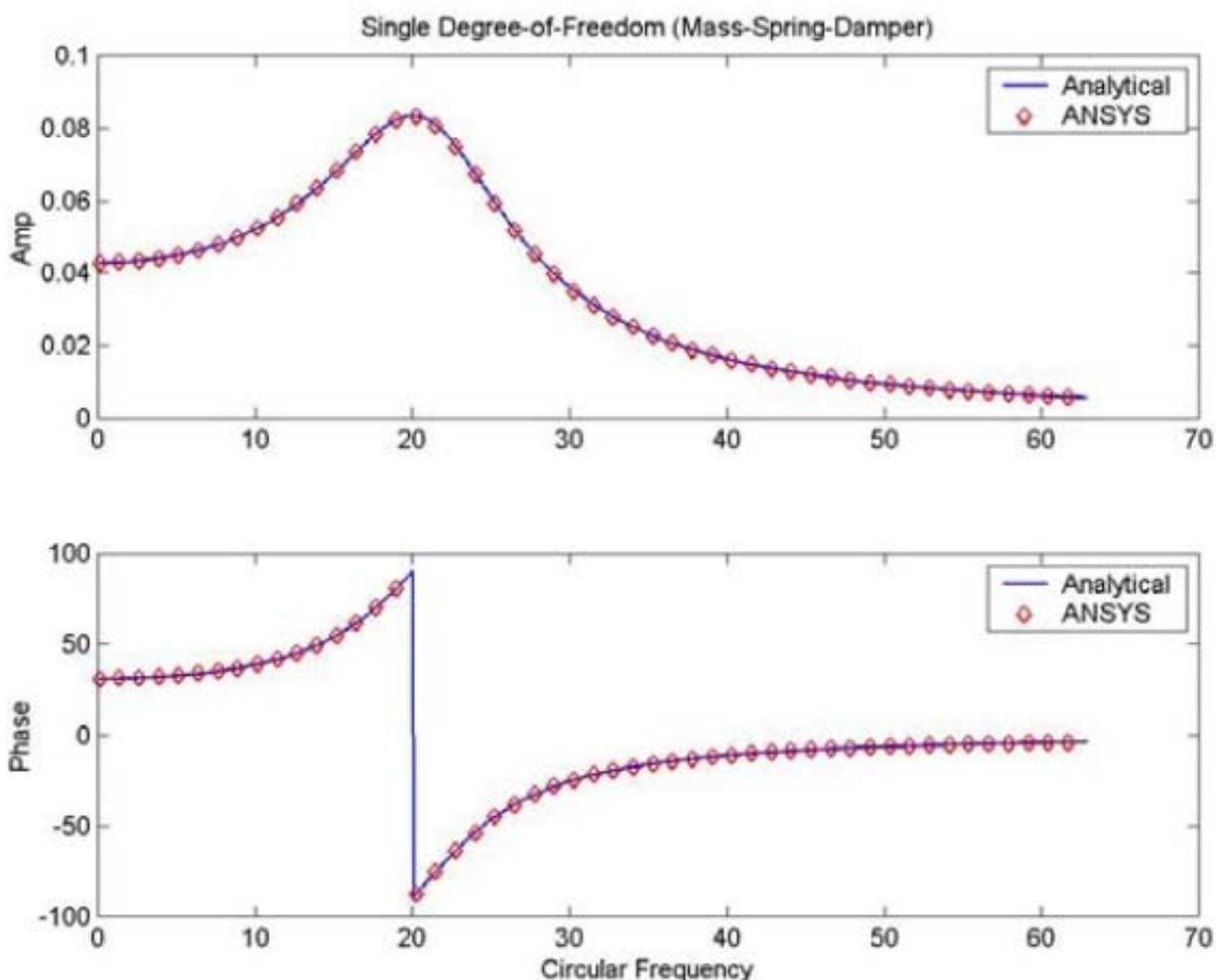


Рисунок 11 – Отклик гистерезисно-демпфированной системы с одной степенью свободы ( $m = 0,5$  кг;  $k = 200$  Н/м;  $\eta = 0,6$ )

2) Через множители  $\beta_j$ , зависящие от материала (вводятся командой MP,DAMP). Демпфирование по материалу  $\beta_j$  можно применять для задания свойств гистерезисного демпфирования колебательных систем как с одной, так и

со многими степенями свободы.  $\beta_j$  рассчитываются по формуле (29), если известны факторы потерь  $\eta_j$ :

$$\beta_j = \frac{\eta_j(\omega)}{\omega} \quad (37)$$

где  $\eta_j(\omega)$  - зависящий от частоты фактор потерь для  $j$ -го материала;  
 $\omega$  - круговая частота.

Для гармонического анализа колебаний формула (37) должна применяться при каждой частоте отдельно. То есть для каждой круговой частоты, при которой проводится анализ, необходимо задавать соответствующее демпфирование  $\beta_j$ .

На рисунке 12 показан отклик колебательной системы с двумя степенями свободы (см. рисунок 6) при гистерезисном демпфере.

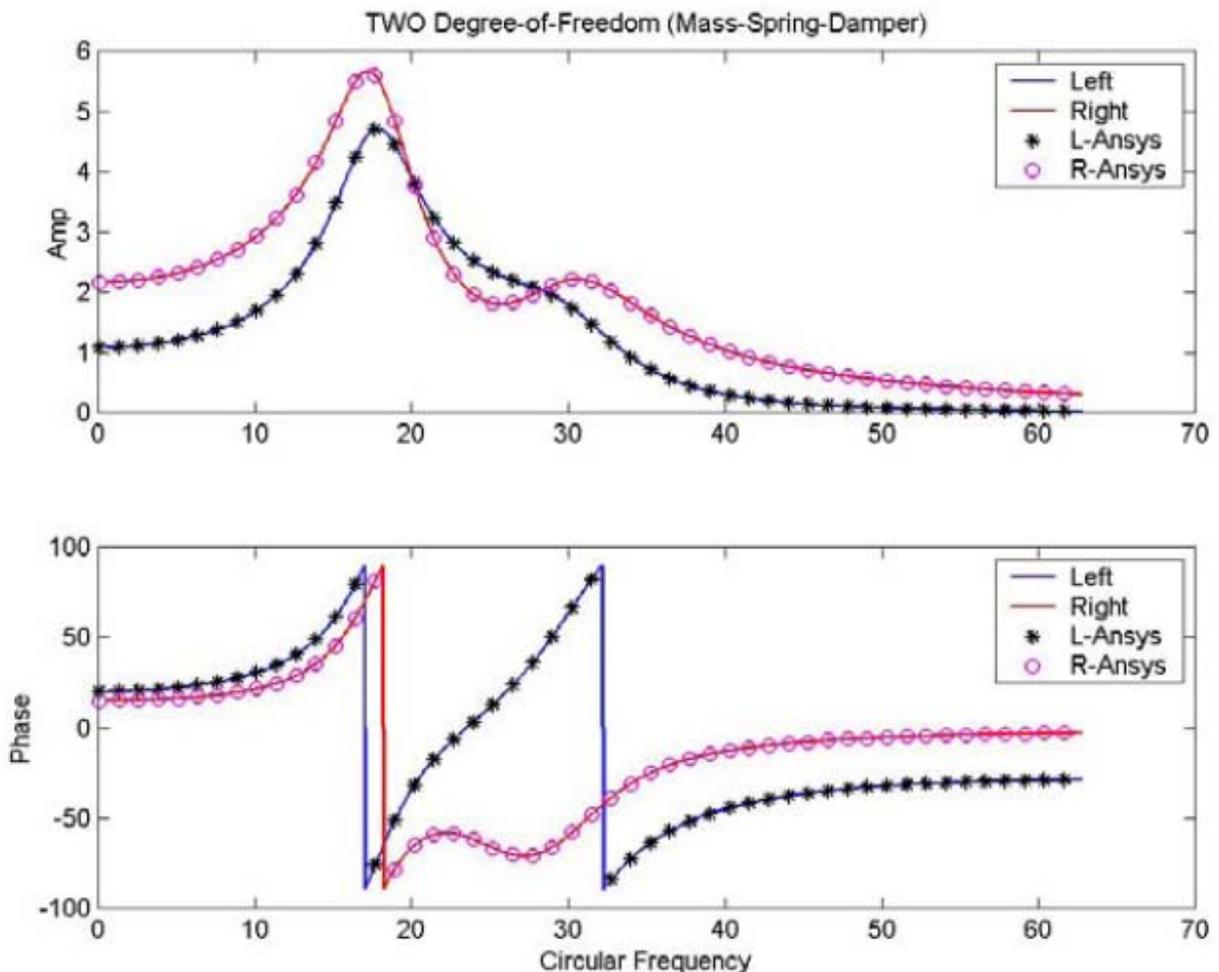


Рисунок 12 – Отклик гистерезисно-демпфированной системы с двумя степенями свободы

(демпфирование через свойства материалов:  $\eta_1 = 0,5$ ;  $\eta_2 = 0,3$ ;  $\eta_3 = 0,2$ )

## Демпфирование колебаний в модальном анализе

Модальный анализ применяется для определения колебательных характеристик (собственных частот и форм) колебательных систем. Результаты модального анализа далее могут быть использованы для других динамических анализов, выполняемых методом суперпозиции мод.

В модальном анализе можно задавать альфа-демппирование (через матрицу масс), бета-демппирование (через матрицу жесткости), степень демппирования в зависимости от материала (вводится через команду `MP,DAMP`<sup>4)</sup>) и поэлементное демппирование (применяется через действительные константы элементов).

Отметим, что в методе суперпозиции мод возможно только рэлеевское, или постоянное демппирование, а явное поэлементное демппирование в таких элементах как COMBIN14 не допускается. В соответствии с формулами (30),(31) и (36), модальное демппирование  $\zeta_r$  представляется в ANSYS как комбинация нескольких различных вводимых параметров:

$$\zeta_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta}{2}\omega_r + \zeta_{mr} + \zeta \quad (38)$$

где  $\alpha$  - общий множитель к матрице масс (вводится командой `ALPHAD`);

$\beta$  - общий множитель к матрице жесткости (вводится командой `BETAD`);

$\zeta$  - постоянная степень демппирования (вводится командой `DMPRAT`);

$\zeta_{mr}$  - модальная степень демппирования (вводится командой `MDAMP`).

Для колеблющейся конструкции, состоящей только из одного материала, зависящее от материала демппирование  $\beta_j$  дает тот же результат, что и глобальное бета-демппирование (по матрице жесткости)  $\beta$ , поскольку  $\beta_j = 2\zeta_j / \omega_{rj}$ . Ясно, что демппирование в зависимости от частоты, наподобие гистерезисного по формуле (37), не применимо при модальном анализе. На практике рэлеевские параметры демппирования материалов (как сплошных демппирующих сред) не могут быть получены из данных, предоставляемых производителями (модули и

---

<sup>4)</sup> (прим. перев.) Команда `MP,DAMP` задает постоянный множитель  $\beta_j$  для  $j$ -го материала.

В ANSYS v.14 эта команда заменена на `MP,BETD`; также появилась возможность задавать для  $j$ -го материала постоянный множитель  $\alpha_j$  - с помощью команды `MP,ALPD`

факторы потерь). Таким образом, рэлеевское демпфирование подходит только для колебательных систем с одной степенью свободы.

## Выводы

Существует несколько способов для введения демпфирования материалов в ANSYS:

- Поэлементное задание демпфирования возможно только для некоторых специальных элементов, таких как COMBIN14, COMBIN37, COMBIN40 и т.д. Коэффициенты вязкого демпфирования вводятся непосредственно как действительные константы. Способ пригоден для колебательных систем с одной или многими степенями свободы;
- Рэлеевское демпфирование (ввод командами ALPHAD и BETAD) пригодно для колебательных систем с одной степенью свободы, поскольку оно зависит от доминирующей собственной частоты и степени демпфирования. Для систем со многими степенями свободы и непрерывных систем определить доминирующую собственную частоту и модальную степень демпфирования затруднительно. Полагая  $\alpha = 0$ , имеем:  $\beta = 2\zeta_r / \omega_r$  ;
- Постоянная степень демпфирования (constant damping ratio, вводится командой DMPRAT) используется для непосредственного задания гистерезисного демпфирования в колебательных системах с одной степенью свободы и (или) в системах, содержащих только один тип материала. Задаваемая постоянная степень демпфирования равна половине фактора потерь:  $\zeta = 0,5\eta$  ;
- Демпфирование в зависимости от материала (вводится командой MP,DAMP) может использоваться для задания вязкого демпфирования  $\beta_j = 2\zeta_j / \omega_n$  или гистерезисного демпфирования  $\beta_j = \eta_j(\omega) / \omega$ . Обладая ограничениями, аналогичными рэлеевскому демпфированию, этот способ может использоваться только для описания вязкого демпфирования в колебательных системах с одной степенью свободы и (или) в

непрерывных системах, содержащих только один материал. Однако, при гармоническом анализе его можно применять для представления гистерезисного демпфирования, зависящего от частоты, при которой выполняется анализ, как в системах со многими степенями свободы, так и в непрерывных системах с несколькими материалами.<sup>5)</sup> Очевидно, этот метод не применим в демпфированном модальном анализе;

- Для демпфированного модального анализа все четыре вышеперечисленных метода для представления материального демпфирования могут использоваться в соответствующем применении. На практике, при анализе собственных частот рэлеевское демпфирование применимо только для колебательных систем с одной степенью свободы. Постоянная степень демпфирования (ввод командой `DMPRAT`) для модального анализа применима только к непрерывным колебательным системам, содержащим только один тип материала с гистерезисным демпфированием. Методы поэлементного ввода демпфирования через действительные константы может применяться при модальном анализе дискретных колебательных систем как с одной, так и со многими степенями свободы и свойствами вязкого демпфирования.

Итак, при использовании ANSYS для анализа колебательных и акустических процессов с демпфированием необходимо проявлять особое внимание.

---

<sup>5)</sup> (прим. перев.) В ANSYS v.14 при выполнении «полного» гармонического анализа (full harmonic analysis) можно для данного материала задать непосредственно фактор потерь  $\eta$  как функцию частоты и (или) температуры (с помощью команд `TB,SDAMP` `TBFIELD` и `TBDATA`)

## Литература

- 1) Denys J. Mead, *Passive Vibration Control*, John Wiley & Sons, Inc., 2000
- 2) Singiresu S. Rao, *Mechanical Vibrations (3rd edition)*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995
- 3) William T. Thomson, *Vibration Theory and Applications*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J, 1965
- 4) Maurice Petyt, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, 1990
- 5) Ahid D. Nashif, Davis I. G. Jones and John P. Henderson, *Vibration Damping*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., 1985
- 6) On-line ANSYS Theory Reference, Release 5.6.
- 7) Roy S., Reddy J, N., Finite-element models of Viscoelasticity and diffusion in Ashesively Bonded Joints, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(1988) 2531-2546
- 8) Yi S., Ahmad M. F., Hilton H. H., Finite element algorithms for dynamic simulations of viscoelastic composite shell structures using conjugated gradient method on coarse grained and massively parallel machines, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(1997): 1857-1875
- 9) Yi S., Ling S. F., Ying M., Hilton H. H., Vinson J. R., Finite element formulation for anisotropic coupled piezoelectro-hydro-thermo-viscoelasto-dynamic problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45 (1999) 1531-1546
- 10) Chung P. W., Tamma K. K., Namburu R. R., A finite element thermo-viscoelastic creep approach for heterogeneous structures with dissipative correctors, *Finite Elements in Analysis and Design*, 36 (3-4) 279-313, 2000